ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

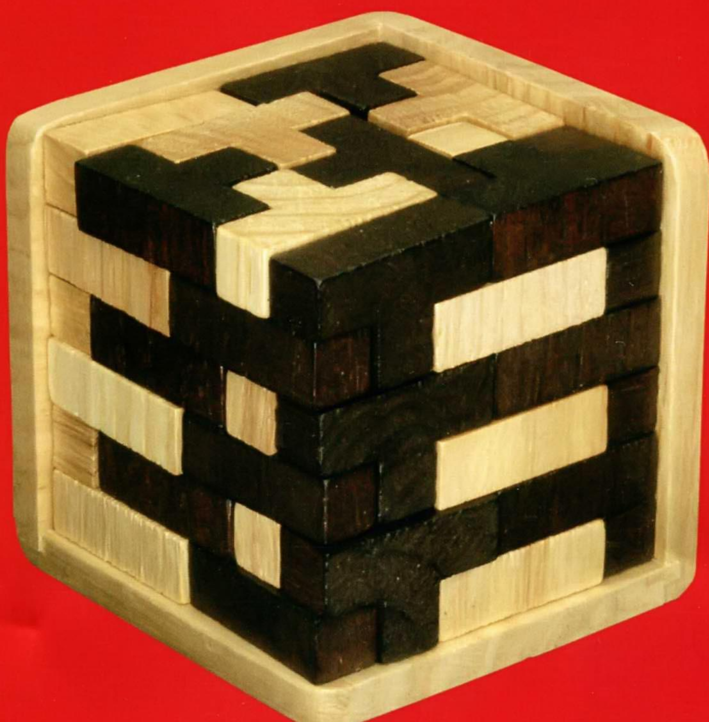
Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

34

Разборный куб



ISSN 2225-1782
00034
9 772225 178772

DeAGOSTINI

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 34, 2013
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва,
ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ВЫПУСКАЮЩИЙ РЕДАКТОР: Варвара Степановская
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ:
Любовь Мартынова

Уважаемые читатели!
Для вашего удобства рекомендуем приобретать выпуски в одном и том же киоске и заранее сообщать продавцу о вашем желании покупать следующие выпуски коллекции.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01
Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 105066, г. Москва, а/я 13, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
РАСПРОСТРАНЕНИЕ:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко
Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
Для заказа пропущенных номеров
и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
По остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: +375 17 2-999-260.
Телефон «горячей линии» в Беларуси:
+375 17 279-87-87 (пн-пт, 9.00 — 21.00)
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»
РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 990 тенге
ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: G. Canale & C. S.p.A.
Sos. Cernica 47, Bucuresti, Pantelimon – Ilfov, Romania.
ТИРАЖ: 68 000 экз.
Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.
Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.
Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782
ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 21.05.2013

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Преобразования плоскости Гомотетия и инверсия — геометрические преобразования плоскости, которые помимо чисто геометрической ценности имеют различное практическое применение. Особую роль они играют в картографии, дизайне и инженерном деле. Всякий раз, когда на картах, схемах или эскизах используется масштаб, в действительности применяется гомотетия. Другой пример использования гомотетии — прокладка туннелей.

Блистательные умы

«Король математиков» Работы Иоганна Карла Фридриха Гаусса охватывают почти все разделы математики, в особенности теорию чисел и дифференциальную геометрию. В своей докторской диссертации Гаусс привел первое доказательство основной теоремы алгебры. Большая часть полученных им важных результатов, относящихся к теории чисел, содержится в его труде Disquisiciones Arithmeticae («Арифметические исследования»).

Математика на каждый день

Движение жидкостей и газов Завихрения сигаретного дыма, поднимающегося вверх, — классический пример явления, анализом которого занимается гидродинамика. Для описания завихрений дыма используются так называемые нелинейные уравнения. Решение нелинейных уравнений относится к задачам, с которыми пока не в состоянии справиться современная математика.

Математические задачки

Головоломки с цифрами Величайший английский головоломщик Генри Э. Дьюдени представляет вашему вниманию задачи о девяти цифрах, которые он выделяет в отдельный класс задач, поскольку всегда считал, что они заслуживают особого внимания. Законы, связанные с такими задачами, известны немногим, хотя некоторые знания свойств цифр часто помогают существенно ускорить арифметические вычисления.

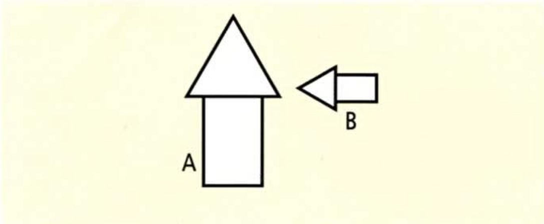
Головоломки

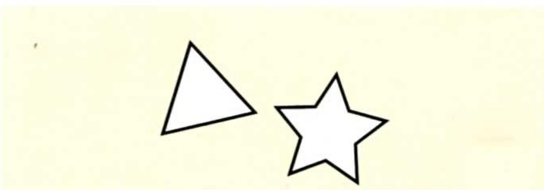
Разборный куб В этой игре, которую можно считать обобщенным вариантом головоломки о спрямлении полимино в трех измерениях, нужно собрать куб 6 × 6 кубиков из 54 одинаковых тетрамино в форме буквы Т. Первый шаг к решению — попытка составить из девяти фигур квадрат со стороной 6, который станет основанием куба. Шесть таких квадратов, поставленных друг на друга, образуют куб со стороной 6. Попытаетесь?

Гомотетия и инверсия — геометрические преобразования плоскости, которые помимо чисто геометрической ценности имеют различное практическое применение. Особую роль они играют в картографии, дизайне и инженерном деле.

Гомотетия и инверсия
Преобразования плоскости

Рассмотрим две пары фигур, изображенные на следующих рисунках:

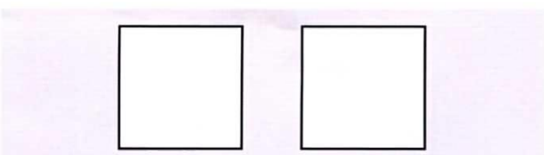




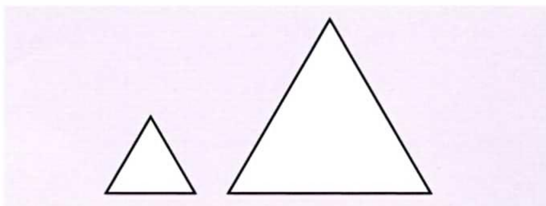
Фигуры А и В на первом рисунке похожи, чего нельзя сказать о фигурах со второго рисунка. Если повернуть фигуру В на 90° по часовой стрелке, переместить ее так, чтобы основания фигур совместились, а затем растянуть, то в какой-то момент фигуры А и В совпадут. Разумеется, с другими двумя фигурами подобное невозможно. Первые две фигуры не равны, но очень похожи. Точнее, эти фигуры подобны. Подобие в геометрии имеет очень четкое определение, равно как и преобразования, которые мы выполнили, чтобы фигуры А и В совпали. Эти преобразования — поворот, перенос и гомотетия.

Топологические

Начнем с того, что дадим точные определения некоторым понятиям. Например, фигуры на рисунке ниже не равны.



Обе эти фигуры являются квадратами, длины их сторон одинаковы, но, строго говоря, они не равны, потому что их положение в пространстве не совпадает. Бертран Рассел считал, что два предмета не могут быть совершенно равны, так как в этом случае мы не смогли бы отличить один от другого и сказать, какой из них «первый», а какой «второй». Они не равны, но подобны, так как существует преобразование плоскости, в данном случае перенос, после которого один квадрат совпадет с другим. Переносы, повороты и симметрии — это преобразования плоскости, которые позволяют сделать так, чтобы две «почти равные» фигуры совпали. Если мы применим эти преобразования к подобным фигурам, они примут одинаковую форму и размер. Если бы мы могли взять эти фигуры в руки и снять их с плоскости, на которой они находятся, то смогли бы наложить одну из них на другую так, что они совпали бы. Со следующими двумя фигурами это невозможно:

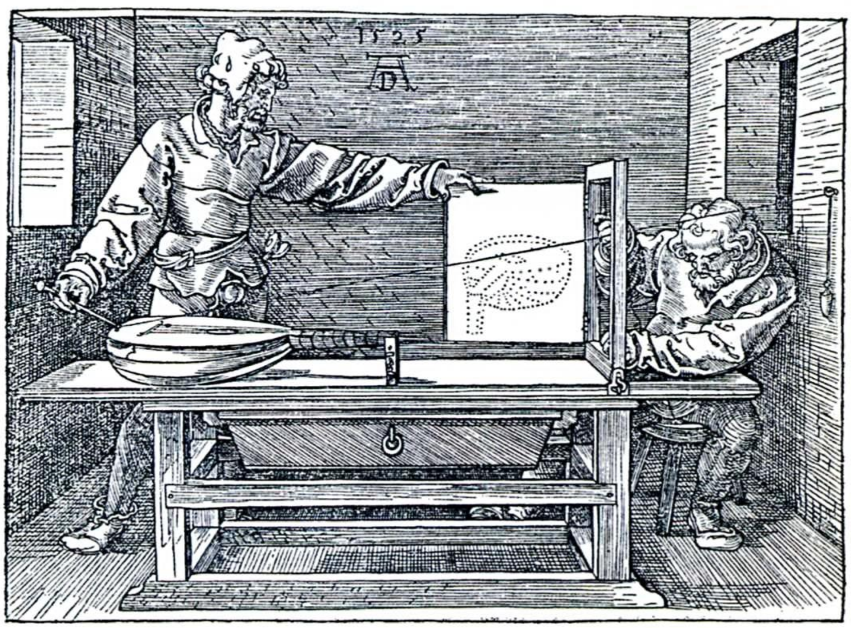


Учитывая все сказанное выше, можно сформулировать первую классификацию преобразований плоскости.

— Преобразования, сохраняющие форму и размер (переносы, повороты и симметрии).

— Преобразования, сохраняющие форму, но не размер.

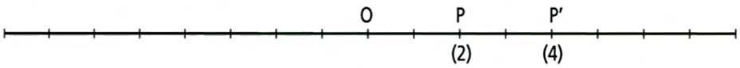
▼ Стремясь изобразить реальность максимально достоверно, художники разных эпох использовали разные приспособления. Например, на этой гравюре немецкого художника Альбрехта Дюрера (1471–1528) изображен примитивный проектор. Практические задачи о перспективе лежат в основе серьезных математических исследований, посвященных преобразованиям на плоскости и в пространстве.



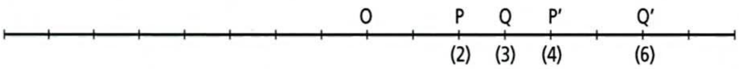
Преобразования первой группы называются движениями, второй группы — преобразованиями подобия. В первом примере на предыдущей странице мы использовали два вида преобразований. Когда мы увеличивали фигуру В так, чтобы она совпала с А, мы использовали преобразование подобия, в частности одну из его разновидностей, которая называется гомотетией.

Гомотетия

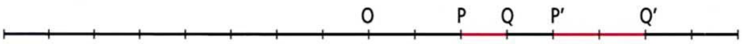
Допустим, что дана прямая, на которой выбрана точка О. Определим преобразование, сопоставляющее каждой точке Р этой прямой другую точку Р' на этой же прямой так, что расстояние ОР' будет в два раза больше ОР:



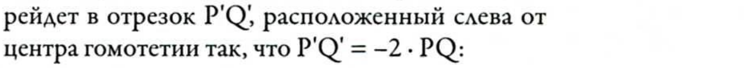
Мы определили гомотетию с центром в точке О и коэффициентом $k = 2$. Говорят, что эта гомотетия переводит точку Р в точку Р'. Так, например, гомотетия переведет точку Q, отстоящую от начала координат на 3 единицы, в точку Q', отстоящую от начала координат на 6 единиц. Таким образом, $OQ' = 2 \cdot OQ$:



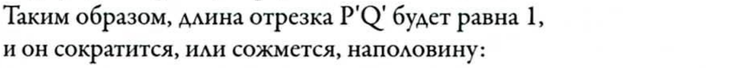
Также можно убедиться, что гомотетия переводит отрезок PQ в отрезок P'Q'. Заметим, что длина полученного отрезка в два раза больше длины исходного:



Коэффициент гомотетии не обязательно должен быть положительным. Мы можем выбрать, например, $k = -2$. В этом случае отрезок PQ перейдет в отрезок P'Q', расположенный слева от центра гомотетии так, что $P'Q' = -2 \cdot PQ$:



Во всех этих примерах мы растягивали фигуры. Причина этому в том, что абсолютное значение выбранного нами коэффициента гомотетии больше единицы. При $|k| < 1$ фигуры будут сжиматься. Например, если $k = 1/2$, точка Р', гомотетичная точке Р, будет располагаться на расстоянии в одну единицу от центра, так как $OP' = 1/2 \cdot OP$. Таким образом, длина отрезка P'Q' будет равна 1, и он сократится, или сожмется, наполовину:



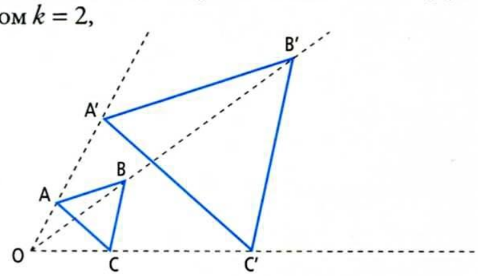
Гомотетия на плоскости

Если мы не будем ограничиваться точками и отрезками на прямой, а рассмотрим множество точек плоскости, то правила игры существенно не изменятся. Нам по-прежнему потребуется центр гомотетии О и коэффициент k. Чтобы найти точку, гомотетичную произвольной точке Р, нам нужно всего лишь соединить эту точку с центром гомотетии, после чего найти на этой прямой точку Р', которая удовлетворяет условию:

$$OP = k \cdot OP', \text{ или } \frac{OP}{OP'} = k,$$

что аналогично.

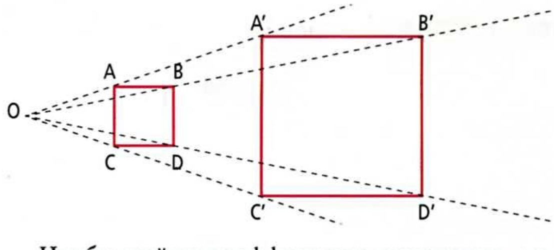
Это преобразование можно применить ко всем точкам некой геометрической фигуры, чтобы получить фигуру, гомотетичную ей. Например, треугольником, полученным из треугольника АВС гомотетией с центром в точке О и коэффициентом $k = 2$,



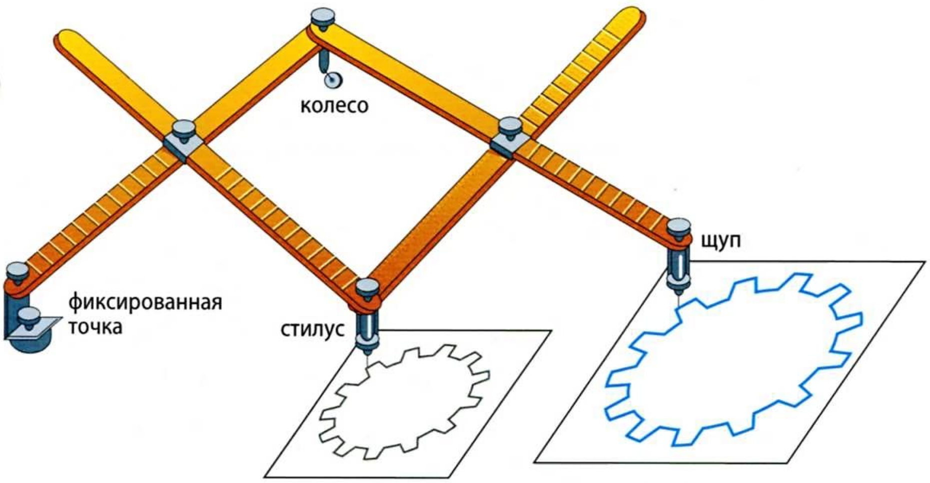
будет другой треугольник А'В'С', стороны которого будут в два раза длиннее сторон исходного треугольника. Если мы применим к треугольнику А'В'С' гомотетию с центром в точке О и коэффициентом $k = 1/2$, то снова получим треугольник АВС. В первом случае, так как $|k| > 1$, треугольник растянулся, во втором — сжался, поскольку $|k| < 1$.

Очевидно, что если $k = 1$, то гомотетичные фигуры будут полностью равны в соответствии с высказыванием Бертрана Рассела. Если $k = -1$, то гомотетия будет эквивалентна центральной симметрии с центром в точке О.

Найти центр и коэффициент гомотетии для двух данных гомотетичных фигур несложно. Допустим, что даны два квадрата ADCD и A'B'C'D'.



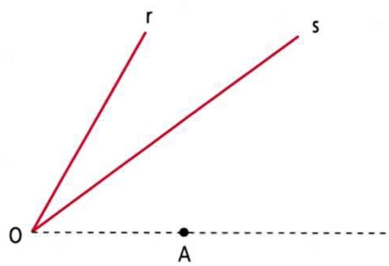
Чтобы найти коэффициент гомотетии, достаточно найти отношение A'B'/AB любых двух сторон этих квадратов. Соединив пары гомотетичных точек прямыми, мы получим центр гомотетии О. Это будет точка, в которой пересекаются все проведенные нами прямые.



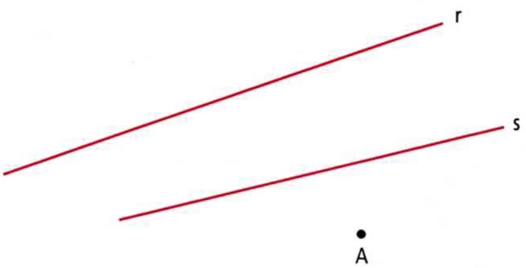
▲ *Пантограф — это инструмент, позволяющий обводить контур исходного изображения и строить его уменьшенную копию, гомотетичную оригиналу, с помощью стилуса. Если поменять стилус и щуп местами, получится гомотетичное изображение большего размера, чем оригинал.*

Применение на практике

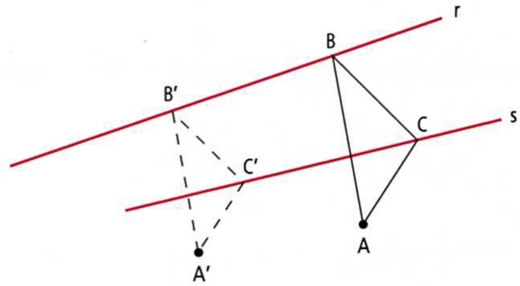
Представим, что мы рисуем эскиз, и нам нужно провести прямую, проходящую через точку A и точку пересечения двух прямых *r* и *s*.



Построить такую прямую несложно. Достаточно взять линейку и провести прямую через точки A и O. Но как быть, если точка O, в которой пересекаются эти две прямые, недостижима?

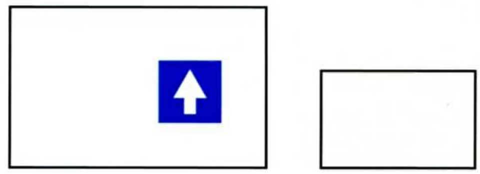


В этом случае нужно построить произвольный треугольник, одной из вершин которого будет точка A, другой — точка B на прямой *r*, третьей — точка C на прямой *s*.



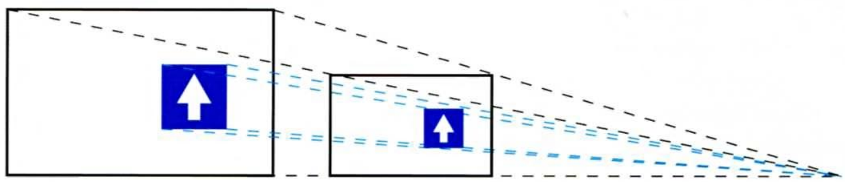
Теперь достаточно построить треугольник, гомотетичный первому, такой что точка B′ будет расположена на прямой *r*, C′ — на прямой *s*. Искомой прямой будет прямая, соединяющая точки A и A′.

С помощью гомотетии можно решить еще одну задачу. Пусть известно, что два прямоугольника на рисунке ниже гомотетичны.



Нужно расположить стрелку на втором прямоугольнике.

Для этого достаточно соединить гомотетичные точки и найти центр гомотетии — точку O. Чтобы определить коэффициент гомотетии, достаточно разделить длину стороны второго прямоугольника на длину стороны первого.



Всякий раз, когда на картах, схемах или эскизах используется масштаб, в действительности применяется гомотетия. Когда говорят, что эскиз имеет масштаб 1:10, это означает, что все предметы, изображенные на нем, получены с помощью гомотетии с коэффициентом 1/10.

Другой пример использования гомотетии — прокладка туннелей. Допустим, что нам нужно проложить туннель в горе, изображенной на рисунке на следующей странице. Известно, что вход туннеля должен находиться в точке E, выход — в точке S. Так как туннели всегда роют с двух сторон, обе бригады рабочих должны встретиться в одной точке. (Удивительно, но так происходит не всегда.) Это означает, что нужно очень точно определить направление бурения.

Свойства гомотетии

Гомотетия, помимо прочего, обладает следующими основными свойствами:

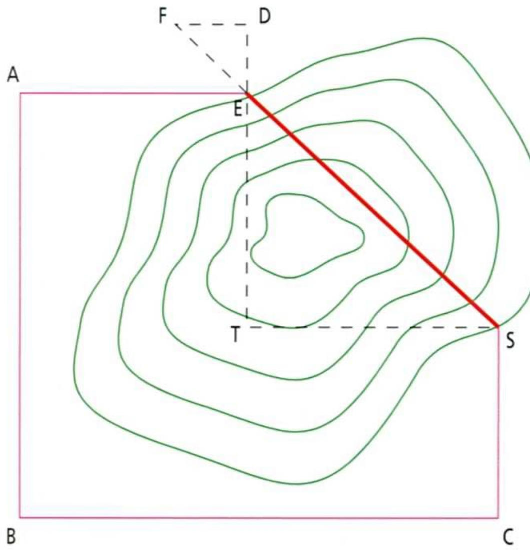
— переводит прямую в прямую;

— переводит точки, не лежащие на одной прямой, в точки, не лежащие на одной прямой;

— переводит отрезок в отрезок;

— соответствующие углы двух гомотетичных треугольников равны;

— переводит окружность в окружность.



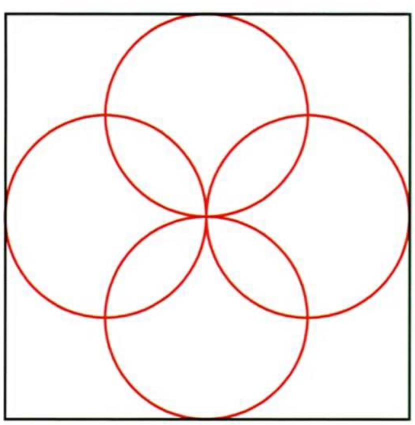
Для этого нужно обозначить границу горы — фигуру EABCS. Эту задачу прекрасно умеют решать инженеры, которых вы иногда можете встретить на улицах с треножником. На треножнике закреплен измерительный инструмент, который называется теодолит. Определить размеры воображаемого прямоугольного треугольника ETS нетрудно:

$$ET = AB - SC,$$
$$TS = BC - AE.$$

Зная эти величины, можно построить гомотетичный ему треугольник EDF (центр гомотетии будет расположен в точке E, коэффициент гомотетии $k < 0$). Направление, в котором нужно рыть туннель, определяется отрезком FE.

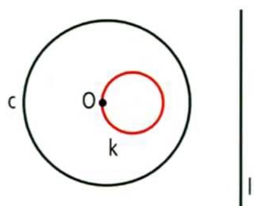
Инверсия

В преобразованиях, о которых мы только что рассказали, подобие фигур бросалось в глаза, так как эти преобразования сохраняли форму. Такие преобразования называют изоморфными (от древнегреческого iso — равный и morfos — форма). Тем не менее, существуют и другие преобразования, которые не обладают этим свойством. Например, фигуры черного и красного цвета на следующем рисунке получены друг из друга одним из таких преобразований, которое называется инверсией.

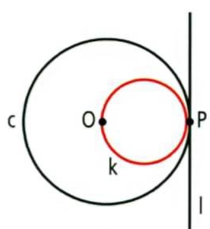


► *Голландский художник Мауриц Эшер (1898–1972), известный своими картинами, полными геометрических узоров, блестяще изобразил отражение в сферическом зеркале, которое в действительности является пространственной инверсией, в своей картине «Рука с отражающей сферой» (1935).*

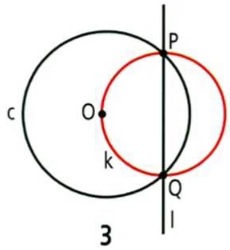
▼ *При инверсии относительно окружности c прямая l, не проходящая через центр O этой окружности, превращается в окружность k, проходящую через точку O, и наоборот (см. рис. 1). Если l касается окружности c, то k будет касаться этой окружности изнутри (см. рис. 2). И, наконец, если l пересекает c в двух точках (P и Q), k будет проходить через O, P и Q (см. рис. 3).*



1



2



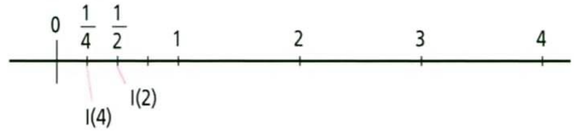
3

Инверсия на прямой

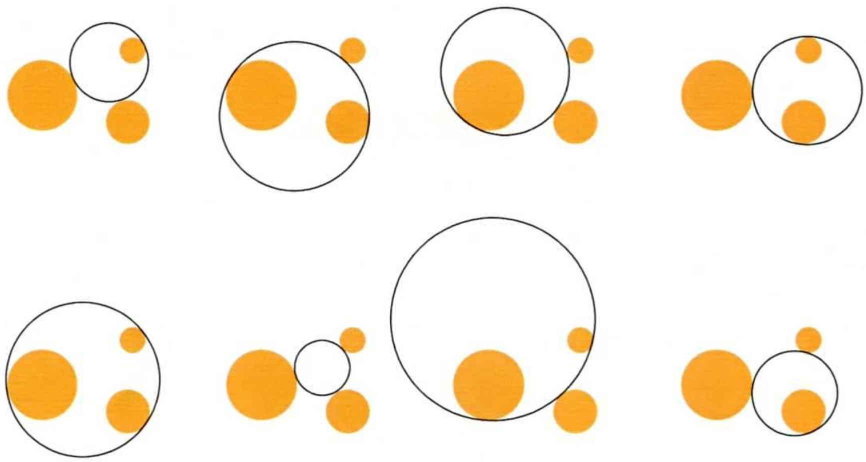
Чтобы определить точку, гомотетичную данной, достаточно было задать центр O и константу k. Положение точки A', гомотетичной точке A, определялось соотношением $OA/OA' = k$. Чтобы определить инверсию, нам снова понадобится точка O, которую мы будем называть центром инверсии, и постоянная P, которую мы будем называть степенью инверсии. Отличие инверсии от гомотетии в том, что инверсия задается с помощью произведения, а не частного.

Говорят, что точка A' получена из точки A путем инверсии с центром в точке O и степенью P, если выполняется условие: $OA \cdot OA' = P$.

Допустим, что дана прямая, на которой определена точка O. Эта точка будет центром инверсии степенью $P = 1$. Координата точки, инверсной произвольной точке A на этой прямой, будет определяться функцией $I(A) = 1/A$. Например, $I(2) = 1/2$; $I(4) = 1/4$.



Также можно определить инверсию с отрицательной степенью. Ее единственная особенность будет заключаться в том, что инверсные точки будут располагаться по разные стороны от центра инверсии.



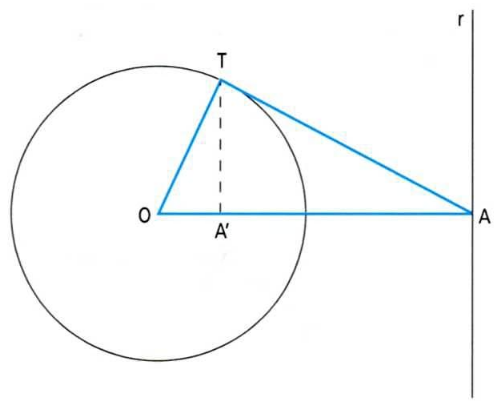
Инверсия на плоскости

▲ *«Задача Аполлония», названная в честь знаменитого древнегреческого геометра Аполлония Пергского (III в. до н. э.), заключается в том, что требуется найти окружности, касающиеся трех данных. Решение (их всегда будет восемь, как можно видеть на рисунке выше) этой задачи элементарно, если использовать свойства инверсии.*

Инверсия на плоскости несколько сложнее и менее понятна, чем гомотетия. Поэтому особенно интересно и в некотором роде необходимо знать, какие точки при инверсии сохраняют исходное положение.

Точка D не изменяет свое положение при инверсии, если выполняется условие $OD \cdot OD = P$, то есть $OD^2 = P$, или, что аналогично, $OD = \sqrt{P}$. Поэтому все точки, находящиеся на расстоянии $\sqrt{P}$ от центра инверсии, останутся на своих местах. Эти точки образуют окружность с центром в точке O и радиусом $\sqrt{P}$. Иными словами, любая точка, лежащая на этой окружности, инверсна сама себе.

Эта окружность называется окружностью инверсии, а ее радиус $r = \sqrt{P}$ — радиусом инверсии. С помощью этой окружности очень удобно находить точки, инверсные произвольным точкам плоскости. Рассмотрим следующую фигуру:



Это окружность с центром в точке O и радиусом $\sqrt{A}$. Отрезок AT является частью касательной к окружности и, следовательно, перпендикулярен ее радиусу OT. Поэтому треугольник OTA прямоугольный. Согласно известной теореме, катет прямоугольного треугольника равен среднему геометрическому гипотенузы и своей проекции на гипотенузу. Получим

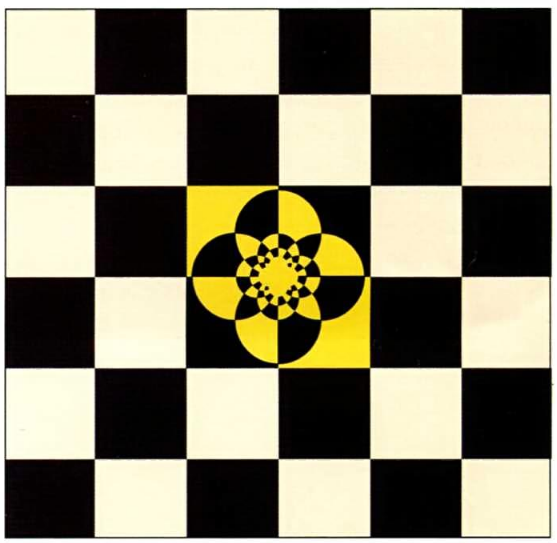
$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}.$$

Отсюда $OA \cdot OA' = OT^2 = r^2 = P$. Таким образом, точки A и A' являются инверсными. Как видим, окружность инверсии очень полезна для нахождения инверсных точек. Для этого сначала нужно провести прямую, соединяющую центр инверсии O и точку A, инверсную которой мы хотим найти. Если точка A лежит вне окружности, проведем из нее касательную к окружности. Опустим из точки касания T перпендикуляр к прямой OA. Точка A', которая будет основанием этого перпендикуляра, будет искомой точкой, инверсной данной. Если точка A лежит внутри окружности, нужно выполнить эти же действия в обратном порядке: провести из этой точки перпендикуляр, затем построить касательную.

Заметим, что все точки, инверсные точкам внутри окружности, расположены вне ее, и напротив, все точки, инверсные точкам вне окружности, расположены внутри нее. Если заменить окружность сферой, мы получим инверсию в трехмерном пространстве.

Как мы уже увидели, все прямые, которые проходят через центр инверсии, переходят сами в себя, так как точка, инверсная любой точке на такой прямой, будет располагаться на этой же прямой.

Перечислим фигуры, инверсные простейшим геометрическим фигурам. (Мы не будем приводить доказательств, однако терпение и геометрическое мышление помогут вам с легкостью подтвердить правильность этих построений.)

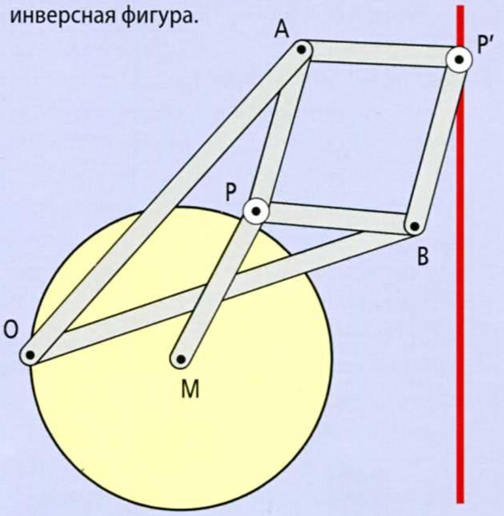


▲ *Если центр инверсии совпадает с центром шахматной доски, получается фигура, которую вы можете видеть в центре рисунка.*

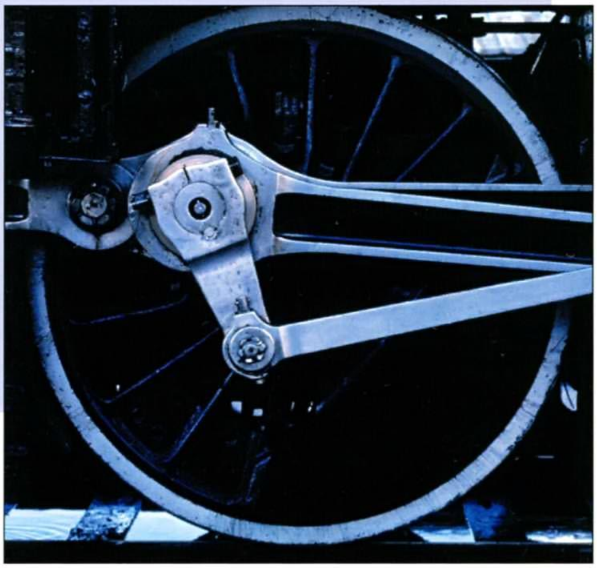
Механизм Липкина — Посселье

Найти фигуру, инверсную данной кривой произвольной формы, достаточно сложно. Существует очень простой механизм, называемый механизмом Липкина — Посселье (внизу), позволяющий найти фигуру, инверсную данной.

Он состоит из шарнирно сочлененных пластин в форме ромба, из вершин A и B которого выходят две пластины, закрепленные в точке O. Другие две вершины, P и P', соответствуют инверсным точкам. Таким образом, достаточно поместить в точку P иглу, которая будет обводить контуры исходной фигуры, а в точку P' — карандаш, с помощью которого будет изображаться инверсная фигура.



При PM = OP точка P будет описывать окружность, проходящую через центр инверсии.



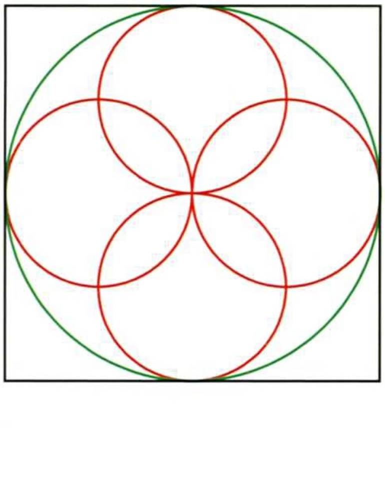
▶ *Передаточные механизмы паровозов и старинных колесных пароходов представляют собой механизмы Липкина — Посселье. Они способны преобразовывать прямолинейное движение поршней во вращательное движение колес.*

— Фигурой, инверсной прямой, не проходящей через центр инверсии, будет окружность, проходящая через него.

— Верно и обратное: фигурой, инверсной окружности, проходящей через центр инверсии, будет прямая, не проходящая через него.

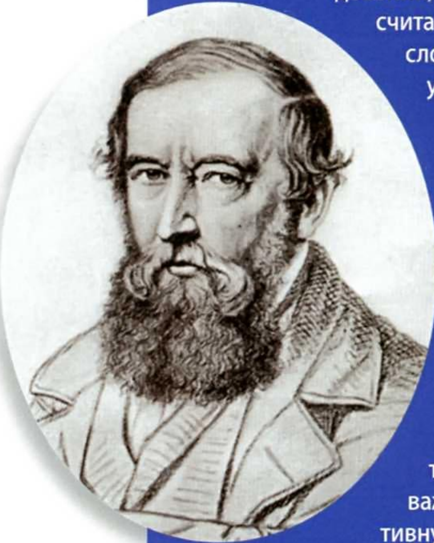
— Фигурой, инверсной окружности, не проходящей через центр инверсии, будет окружность, также не проходящая через него, гомотетичная первой (этот случай несколько сложнее предыдущих).

Если прямая касается окружности инверсии, инверсной ей фигурой будет окружность. Концами диаметра этой окружности будут центр инверсии и точка касания прямой и окружности инверсии. Это объясняет, почему фигура, приведенная в начале этого раздела, имеет именно такую форму. Если окружностью инверсии является окружность, выделенная на рисунке зеленым цветом, то четыре красных круга будут инверсными четырем сторонам квадрата.



▼ *Якоб Штейнер, большой знаток инверсии, доказал, что окружность является кривой, охватывающей наибольшую площадь среди всех кривых заданной длины. Это доказательство позднее дополнил Карл Вейерштрасс (1815–1897).*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

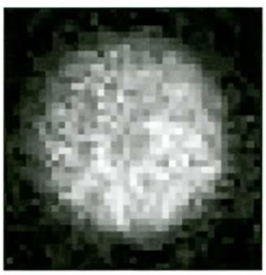


■ В настоящее время инверсия не является предметом математических исследований, так как этот вопрос считается закрытым. Иными словами, об инверсии уже было сказано все, что только можно было сказать. Математик Якоб Штейнер (1796–1863) получил большинство результатов, принадлежащих к так называемой инверсивной геометрии. Этот швейцарский математик, который также совершил очень важный вклад в проективную геометрию, пошел в школу лишь в 18 лет, а в 14 он еще не умел ни читать, ни писать.

Гаусс, один из величайших математиков всех времен, проявил свой удивительный талант в очень юном возрасте. Уже в три года, еще не умея читать, он как-то указал отцу на совершенную им ошибку в вычислениях.

«Король математиков»
Иоганн Карл Фридрих Гаусс

Иоганн Карл Фридрих Гаусс родился в Брауншвейге (Германия) 30 апреля 1777 года. Он был родом из небогатой семьи, и если бы жизнь шла своим чередом, то Гаусс стал бы садовником или каменщиком. Благодаря усилиям матери Доротеи Бенц юному Гауссу удалось покинуть деревню и впоследствии стать «королем математиков», поскольку герцог Брауншвейгский пожаловал ему стипендию для учебы в колледже, а затем и в Гёттингенском университете, где Гаусс позднее возглавил кафедру астрономии и занял пост директора университетской обсерватории. Гаусс был оптимистом и консерватором не столько по политическим убеждениям, сколько из уважения к герцогу, своему покровителю. Он был единственным ребенком в семье и женился лишь в возрасте 32 лет. Его женой стала Иоганна Остгоф, которая родила ему троих детей. Третий ребенок умер спустя несколько месяцев после кончины Иоганны. Гаусс снова женился в 1810 году на Вильхельмине Вальдек, дочери заведующего кафедрой права в Гёттингенском университете. В этом браке у Гаусса также родилось трое детей. 23 февраля 1855 года Гаусс умер в Гёттингене. К тому времени он был известен всему миру.



◄▼ *В 1801 году Гаусс (слева) рассчитал орбиту малой планеты Цереры (внизу изображен ее снимок, сделанный телескопом «Хаббл»), за что в 1807 году был избран директором обсерватории немецкого университетского городка Гёттингена. Этот пост Гаусс занимал до конца жизни.*

Готово!

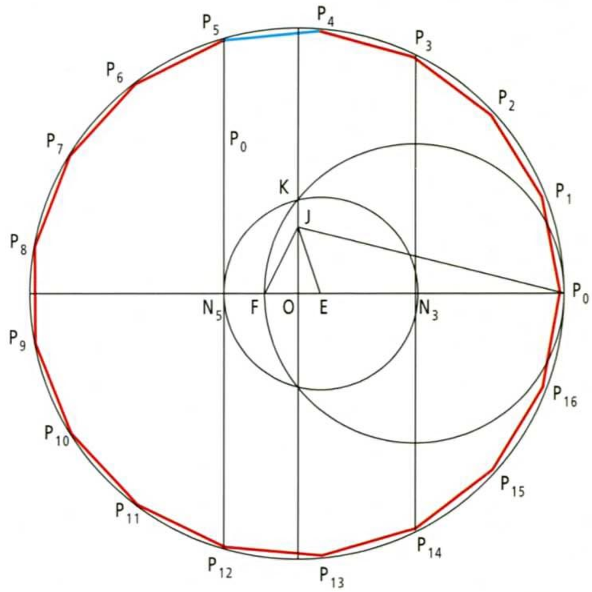
Нетрудно представить себе, в каких условиях Гаусс учился в начальной школе. Это была сельская школа, где учитель с прутом в руке должен был управляться с сотней учеников. Чтобы занять детей на долгое время, педагог давал им рутинные задачи на вычисления, которые нужно было записывать на старых табличках. Как-то раз он дал ученикам задание найти сумму всех чисел от 1 до 100. Гаусс мгновенно поднял свою табличку над головой, воскликнув: «Ligget se!» («Готово!»). Гаусс был единственным в классе, кто нашел верный результат, так как он использовал в расчетах следующий факт:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 = (1 + 100) + \\ + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) = \\ = 50 \cdot 101 = 5\,050,$$

сведя задачу к нахождению суммы членов арифметической прогрессии. На тот момент ему было девять лет. Этот случай не остался незамеченным: учитель стал относиться к нему иначе, чем к остальным ученикам, и познакомил его с Иоганном Мартином Бартельсом (1769–1836), страстным любителем математики, который был на восемь лет старше Гаусса. Вместе с Бартельсом Гаусс начал свое восхождение к вершинам математики. Они поддерживали дружеские отношения всю жизнь.

Правильный 17-угольник

Задача о построении правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки оставалась нерешенной со времен древних греков. Были известны алгоритмы построения правильных многоугольников с 3, 4, 5 и 15 сторонами, а также



► *Блестящая математическая карьера Гаусса началась, когда он в возрасте всего 18 лет решил задачу о построении правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки. Он был первым, кому удалось решить подобную задачу со времен Евклида. На последнем шаге построения, приведенном на рисунке справа, полученные точки (P_0 — P_{16}) соединяются отрезками, образующими искомый многоугольник.*

на их основе многоугольников с удвоенным числом сторон. 30 марта 1796 года Гаусс открыл способ построения правильного 17-угольника. Эта дата стала поворотной в его биографии, так как в этот день он начал вести свой научный дневник, охватывающий период с 1796 по 1814 год. Его дневник считается подлинной жемчужиной математики, так как в нем Гаусс записывал все свои открытия. Возможно, намного важнее было то, что именно в тот день Гаусс решил посвятить себя математике, а не филологии, хотя имел неплохие задатки и в этой дисциплине.


DISQUISITIONES

ARITHMETICAE

AUCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAUSS.

LIPSIAE

IN COMMISSIS APUD GERH. FLEISCHER JUN.

1801.

▲ *«Арифметические исследования», опубликованные в 1801 году, содержали первое доказательство квадратичного закона взаимности, алгоритм, позволявший алгебраически определять возможность построения правильного многоугольника с n сторонами, подробное изложение теории конгруэнтных чисел, а также многочисленные заключения, имеющие отношение к числам и функциям комплексной переменной.*

Научная работа

Работы Гаусса охватывают почти все разделы математики, в особенности теорию чисел и дифференциальную геометрию. Докторская диссертация Гаусса содержала важные математические заключения. В ней он привел первое доказательство основной теоремы алгебры (всякий многочлен с вещественными коэффициентами можно представить в виде произведения многочленов первой и второй степени). Большая часть полученных им важных заключений, относящихся к теории чисел, содержится в его труде Disquisiciones Arithmeticae («Арифметические исследования»), где, помимо прочего, описывается квадратичный закон взаимности, приводится системное введение в теорию комплексных чисел, а также объясняется их графическое представление и построение некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки.

▶ *Эта марка бывшей Германской Демократической Республики (ГДР) — заслуженная дань уважения Иоганну Карлу Фридриху Гауссу за его вклад в геодезию.*

ЭТО ИНТЕРЕСНО

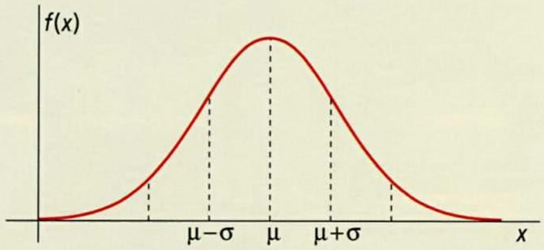
- Два исследования, выполненные Гауссом, наглядно демонстрируют его практический склад ума. Речь идет о выполнении вычислений, необходимых для оздоровления экономики фонда помощи вдовам Гёттингена (их число существенно возросло в 1844 году), а также о систематическом исследовании курса акций

по данным, опубликованным в иностранной прессе. Когда «колокол Гаусса» (изображен на немецкой банкноте в 10 марок на рисунке сверху) «зазвонил», прибыль, полученная от этого исследования, намного превысила его зарплату преподавателя.

- В 1833 году Гаусс совместно с Вильгельмом Вебером (1804–1891) занимался исследованиями в области электромагнетизма. Для быстрой отправки сообщений Гаусс собственноручно сконструировал электрический механизм, способный передавать сообщения на расстояние до двух километров. Этот механизм представлял собой не что иное, как электрический телеграф.

«Колокол Гаусса»

В возрасте 18 лет Гаусс открыл метод наименьших квадратов, что пробудило в нем особый интерес к теории ошибок измерений. Он разработал метод статистических наблюдений, в котором нормальное распределение ошибок описывалось кривой в форме колокола, где μ — средняя величина, σ — среднеквадратическое отклонение. Эта кривая, ставшая самой известной кривой в математике, получила название «колокол Гаусса».



В трактате Disquisiciones generales circa superficies curvas («Исследования относительно кривых поверхностей»), изданном в 1827 году, описываются результаты его исследований в области дифференциальной геометрии поверхностей, вводится понятие гауссовой кривизны и доказывается Teorema Egregium — основная теорема теории поверхностей. Гаусс также был первым, кто изучил неевклидову геометрию и дал ей это название.

Доказательством тому, что он интересовался не только чистой математикой, служат его работы о земном магнетизме, электромагнетизме, капиллярности, притяжении эллипсоидов и геометрической оптике. В геодезии Гаусс, помимо прочего, известен изобретением гелиотропа — прибора, позволяющего передавать сигнал при геодезических измерениях путем отражения солнечного луча.

Турбулентность — это физическое явление, которое может стать причиной серьезных происшествий и нанести значительный ущерб. Никому до сих пор не удалось понять, как возникает турбулентность, и решить математические уравнения, которыми она описывается.

Гидродинамика

Движение жидкостей и газов

◀ *Гидродинамика особенно важна при изучении многих явлений, например Большого красного пятна на диске Юпитера (см. рисунок). Большое красное пятно — это атмосферный вихрь, в котором потоки воздуха движутся против часовой стрелки со скоростью 400 километров в час. В направлении с севера на юг размер вихря равен 13 000 километров, в направлении с востока на запад его размер более чем в два раза превышает диаметр Земли.*

Гидродинамика — это раздел физики, изучающий движение жидкостей и газов. Это одна из областей, которые описываются чрезвычайно сложным математическим языком. Чтобы движение потока жидкости или газа можно было описать совокупностью более или менее доступных уравнений, необходимо установить ряд ограничений на поведение потока, например указать, что плотность потока постоянна (иными словами, поток является несжимаемым), либо определить его поведение несколькими переменными, в частности давлением, плотностью и температурой. Поток также должен быть стационарным. Это означает, что некоторые переменные, в частности скорость и давление, не должны зависеть от времени, а движение потока должно быть ламинарным. Ламинарность подразумевает перемещение слоями без смешивания и отсутствие турбулентности. Разумеется, в действительности почти ни одно из этих условий не выполняется. Однако это не мешает создавать модели, достаточно точно описывающие поведение потока, которые можно использовать в реальных ситуациях. Тем не менее, четвертое из указанных нами условий (о ламинарности потока) в последние годы представляет собой важную проблему, которая затрагивает не только теоретическую физику, но и математический анализ. Момент, когда ламинарное движение потока сменяется турбулентным, пока слабо изучен.

«Одомашненная» турбулентность

Существует простой эксперимент, демонстрирующий переход от ламинарного движения к турбулентности. Нужно немного приоткрыть водопроводный кран так, чтобы из него начали капать отдельные капли воды. Когда мы откроем кран чуть больше, капли сольются друг с другом, поток ускорится, и одновременно с этим начнут появляться брызги. Если мы будем открывать кран и дальше, в определенный момент капли воды образуют одну непрерывную струю. Если увеличивать напор очень медленно, то можно заметить момент перехода в новое состояние, когда вода течет плавно, без брызг. В этот момент поток становится ламинарным, вода образует слои, которые плавно текут без перемешиваний друг с другом.

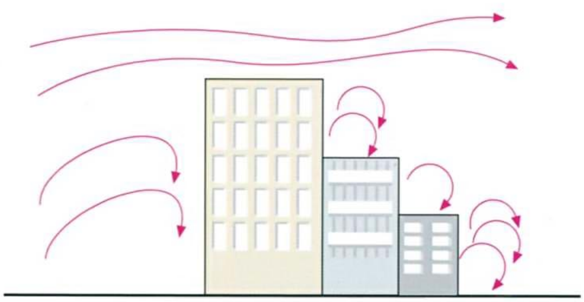
◀ *Явления, связанные с поведением потоков, например потоков воздуха в атмосфере (вверху и слева), нельзя описать уравнениями гидродинамики, так как их можно использовать лишь при соблюдении определенных условий, что невозможно в природе.*

◄ *Турбулентность постоянно окружает нас в повседневной жизни, хотя мы не замечаем этого. Например, турбулентность возникает в ламинарном потоке под механическим воздействием, когда струя воды вытекает из водопроводного крана.*

При дальнейшем увеличении напора потоки будут делиться на две и даже на три части, закручиваясь относительно друг друга, а затем поток воды примет совершенно беспорядочную форму. Брызг станет больше, и даже появится пена, как в небольшом водовороте. В этот момент возникает турбулентность.

Турбулентность

Причины турбулентности могут быть разными, однако все они принадлежат к одной из двух групп — механические или термические. Примером механической турбулентности может служить нарушение ламинарности потока воздуха из-за трения с земной поверхностью, столкновения с горами или даже жилым кварталом. Причина термической турбулентности — разница температур между слоями воздуха. Если, например, верхние потоки охлаждаются (или нижние подогреваются), начинается конвективное движение воздуха, восходящие и нисходящие потоки образуют завихрения, и возникает турбулентность. Завихрения также возникают на крыльях самолета и представляют большую опасность, особенно для самолетов с малым размахом крыльев. Турбулентность может стать причиной не только авиакатастроф, но и повреждений винтов судов, разрушений нефтепроводов и поломок турбин ветрогенераторов.



► *Турбулентность может иметь очень серьезные последствия, например, для крыльев самолетов. При проектировании самолетов поведение потоков воздуха подробно изучается в аэродинамической трубе (см. рисунок), так как они могут стать причиной авиакатастрофы.*

▲ *Исследования, посвященные всемирному потопу (см. рисунок), которые содержатся в рукописях Леонардо да Винчи, хранящихся в Виндзорском замке, показывают, что этот великий ученый не обошел своим вниманием и вопрос турбулентности.*

Уравнения Эйлера

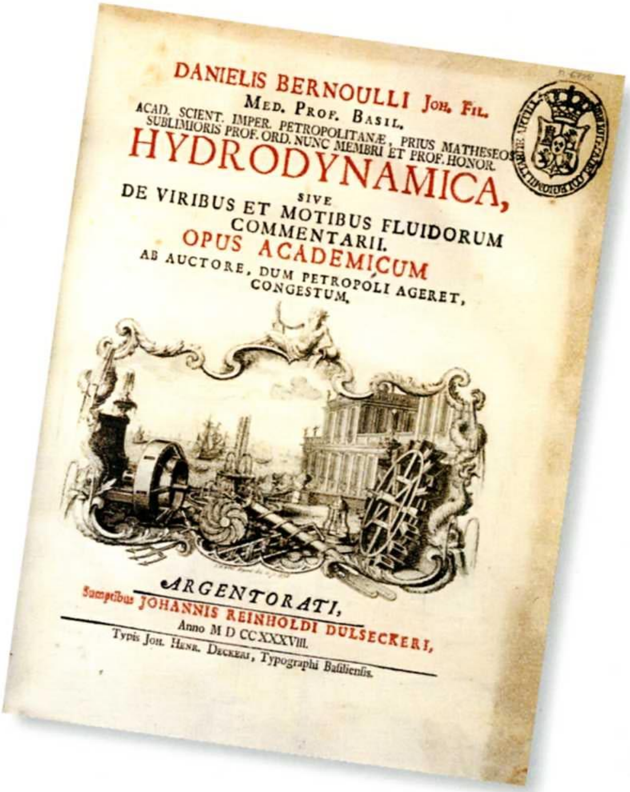
Первые публикации по гидродинамике появились в XVIII веке в результате решения практических задач, в частности при проектировании судов, парусов и изучении приливов и отливов. Эйлер, который был пионером в этой области, в 1755 году написал работу под названием «Общие принципы движения жидкостей», в которой привел уравнения движения для сжимаемых и несжимаемых потоков (иными словами, применимые как к жидкостям, так и к газам).

Его основная гипотеза заключалась в том, что поток не является вязким и является непрерывным. Таким образом, Эйлер смог описать движение частиц своего «идеального потока» с помощью уравнений, которые на языке современной математики записываются так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\rho \mathbf{u})) + \nabla p = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E+p)) = 0,$$



◄ *Шедевр Даниила Бернулли «Гидродинамика», опубликованный в 1738 году (его обложка приведена на рисунке), помимо точных вычислений содержит связное и последовательное объяснение понятий уравнения, интеграла, теоремы и закона Бернулли.*

где ρ — плотность потока, p — давление, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, E — общая энергия на единицу объема.

Вязкость

Вязкость — это свойство текучих тел оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. Это сопротивление проявляется в том, что при движении слоя жидкости он тянет за собой слои, которые соприкасаются с ним. Все потоки в большей или меньшей степени являются вязкими, поэтому вязкости уделяется особое внимание при поиске уравнений, описывающих движение потока.

Уравнения Навье — Стокса

Название уравнений Навье — Стокса наводит на мысль о том, что эти ученые работали совместно, но это не так. В 1821 году Клод Луи Мари Анри Навье (1785–1836) определил систему уравнений, описывающих динамику вязкого потока, молекулы которого движутся под действием сил отталкивания. Эти уравнения (достаточно пугающего вида) записываются так:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f},$$

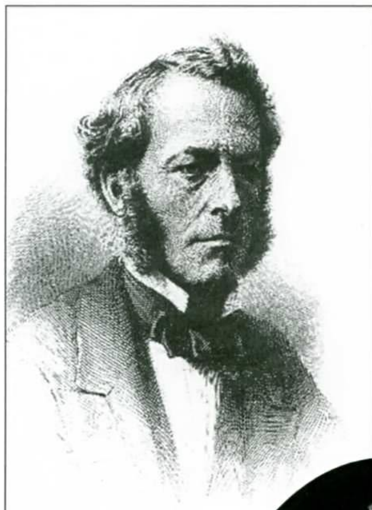
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Эти уравнения, также полученные Пуассоном в 1829 году, независимо от Навье были открыты преподавателем математики Кембриджского университета Джорджем Габриелем Стоксом (1819–1903) и опубликованы им в статье «О теориях внутреннего трения движущихся жидкостей». В его работе рассматривалось снижение скорости частиц жидкости, связанное с потерей энергии, обусловленной выделением тепла под действием трения, вызванного вязкостью. Он пришел к тем же результатам, что и Навье, поэтому эти уравнения в настоящее время известны как уравнения Навье — Стокса.

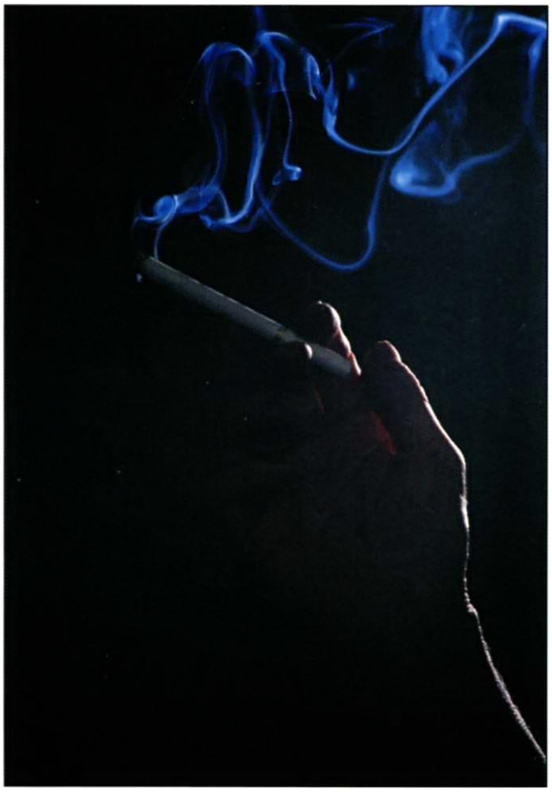
Уравнения в частных производных

Первые уравнения в частных производных, важные с математической точки зрения, появились в XVIII веке и относились к гидродинамике. Как вы уже увидели, в XIX веке к этим уравнениям добавились уравнения, описывающие поведение вязких потоков. Две другие большие группы уравнений этого типа были образованы уравнениями, описывающими эластичное движение и электромагнетизм.

▼ *В гидродинамике изучается не только течение жидкостей и газов, но и преобразования, происходящие, например, при падении капли жидкости, изображенные на иллюстрации.*



▲► *Стокс (вверху) и Навье (справа) были одними из тех, кто сформулировал уравнения гидродинамики. Навье (1785–1836) первым определил уравнения, в настоящее время известные как уравнения Навье — Стокса. Независимо от него эти же уравнения получил Пуассон в 1829 году.*

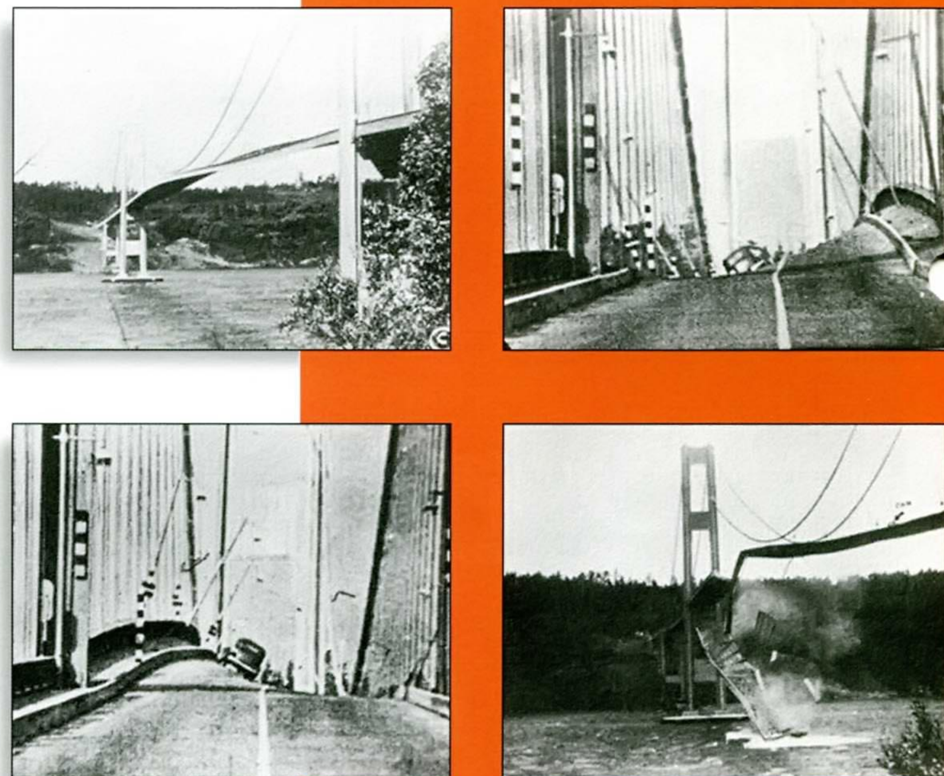


◄ *Завихрения сигаретного дыма, поднимающегося вверх, — классический пример явления, анализом которого занимается гидродинамика. Для описания завихрений дыма используются так называемые нелинейные уравнения. Решение нелинейных уравнений относится к задачам, с которыми пока не в состоянии справиться современная математика.*

Уравнения, задающие движение системы с течением времени, сами по себе являются моделью, описывающей поведение системы. Если поведение системы подчиняется законам Ньютона, то она описывается так называемыми дифференциальными уравнениями. Если же следует учитывать положение в пространстве и времени, эти уравнения превращаются в уравнения в частных производных, а в случае с уравнениями с несколькими неизвестными — в системы уравнений в частных производных. Это усложняет решение и требует глубоких знаний математики. Решение усложняется еще больше, если речь идет о нелинейных уравнениях, какими являются уравнения Навье — Стокса. Эти уравнения получили пышное название «нелинейные уравнения в частных производных», а их решение пока еще неподвластно современной математике. При определенных начальных условиях уравнения Навье — Стокса находят практическое применение в авиастроении, гидравлике и метеорологии. В физике корректность этих уравнений была полностью доказана, и наряду с уравнениями Ньютона, Шрёдингера и Максвелла они были причислены к фундаментальным уравнениям физики. Тем не менее, пока неясно, возможно ли появление различных решений для этих уравнений при неизменных начальных условиях. Кроме того, явление турбулентности по-прежнему является загадкой для современной науки. Возможно, что новая теория хаоса поможет лучше понять турбулентность и подобные явления, но в этом случае потребуется новая математика, способная описать их.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Висячий Такомский пост, соединявший город Такому в штате Вашингтон с полуостровом Гиг Харбор, был заметным произведением инженерного искусства. Утром 7 ноября 1940 года в Такоме поднялся умеренный ветер. Скорость ветра составляла 68 км/ч. Неожиданно мост начал сильно раскачиваться и внезапно обрушился. Согласно общепринятой теории, причиной обрушения стали завихрения воздуха, возникшие в конструкциях моста, и механический резонанс, когда внешняя частота ветрового потока совпала с внутренней частотой колебаний моста.



▲ *На этой серии фотографий изображены четыре этапа разрушения Такомского моста. Вы можете оценить, насколько сильными были колебания моста, ставшие причиной его обрушения.*

- Математический институт Клэя в Кембридже (штат Массачусетс) учредил премию для тех, кто сможет решить одну из семи математических задач. Решение каждой задачи оценивается в один миллион долларов. Предложить решение может любой желающий. Чтобы подать заявку, не нужно обладать ученой степенью. Одной из этих семи задач является решение уравнений Навье — Стокса, в частности доказательство существования и гладкости решений этих уравнений.

Генри Э. Дьюдени

Головоломки с цифрами

Девятью достоинствами они зовутся.
Драйден. «Цветок и лист»

Я представляю вашему вниманию эти задачи о девяти цифрах, которые выделяю в отдельный класс задач, поскольку всегда считал, что они заслуживают большего внимания, чем им обычно уделяют. Помимо простого трюка, который заключается в удалении девяток, законы, связанные с такими задачами, известны немногим, хотя некоторые знания свойств цифр часто помогают существенно ускорить арифметические вычисления. Приведу один пример — первый, который пришел в голову.

Если я попрошу вас определить, является ли число 15 763 530 163 289 квадратом некоторого числа, как вы это сделаете? Если бы это число заканчивалось на 2, 3, 7 или 8, оно не могло бы быть квадратом, однако, на первый взгляд, в этом числе нет ничего такого, что помешало бы ему быть квадратом. Подозреваю, что читатель со вздохом или брюзжанием примется за вычисление квадратного корня. Однако если бы ему были известны некоторые свойства цифр, он смог бы легко ответить на мой вопрос. Сумма цифр этого числа равна 59; сумма цифр этого числа, в свою очередь, равна 14, а сумма цифр этого числа равна 5 (последнее число я назову цифровым корнем). Следовательно, это число не может быть квадратом, и вот по какой причине: цифровой корень всех квадратов, начиная с 1, всегда равен 1, 4, 7 или 9 и не может равняться никакому другому числу. В действительности, ряд 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9 будет повторяться до бесконечности. Аналогичный ряд для треугольных чисел, то есть для чисел вида $(n^2+n)/2$, выглядит так: 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 9, 9. Таким образом, число не может быть треугольным, если его цифровой корень равен 2, 4, 5, 7 или 8.

1. Пивной бочонок

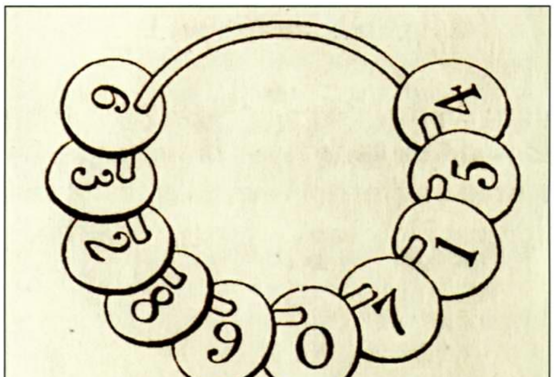
Один человек купил несколько бочек с вином и один бочонок с пивом. Эти бочонки изображены на рисунке. Там же указано, сколько галлонов напитка содержится в каждом бочонке. Он продал часть вина одному покупателю и вдвое больше вина другому, а пиво оставил себе. Задача заключается в том, чтобы указать, в каком из бочонков находится пиво. Сможете справиться с этой задачей? Разумеется, этот человек ничего не подливал в бочонки перед продажей.

2. Цифровое умножение

Приведу еще одну занимательную задачу о девяти цифрах (за исключением нуля). Используя каждую цифру только один раз, можно записать две пары чисел так, что их произведение будет одинаковым. Это можно сделать множеством способов. Например, в парах чисел $7 \cdot 658$ и $14 \cdot 329$ все цифры содержатся ровно один раз, и в обоих случаях их произведение будет одинаковым и равно 4606. Заметим, что сумма цифр результата 16 — это не наибольшая и не наименьшая возможная сумма. Можете ли вы найти такие числа, чтобы сумма цифр в результате умножения была наибольшей? А наименьшей?

3. Задача о пронумерованных кружках

Когда в одном здании работает много служащих, каждому обычно выдается небольшой кружок с номером. Когда сотрудники приходят на работу, они кладут эти кружки на специальную доску как доказательство того, что они пришли на работу вовремя. Как-то я заметил, что управляющий взял несколько кружков с доски и нанизал их на кольцо, которое носил в кармане. Это навело меня на мысль о неплохой головоломке. Признаюсь читателям, что именно так я всегда придумываю мои задачи. Идею нельзя создать, она возникает сама собой, и нужно просто быть внимательным, чтобы не упустить ее.



На рисунке видно, что на кольцо надето десять кружков с номерами от 0 до 9. Задача состоит в том, чтобы разделить кружки на три группы, не снимая с кольца, так чтобы число, составленное из цифр первой группы, умноженное на такое же число для второй группы, равнялось бы числу для третьей группы, составленному по такому же правилу. Например, цифры можно разделить на три группы так: 2–8907–15463 (для этого нужно передвинуть 6 и 3 к цифре 4). К сожалению, произведение двух первых чисел не равно третьему. Сможете ли вы правильно сгруппировать кружки с цифрами? Разумеется, каждая группа может состоять из любого числа кружков. Чтобы решить эту задачу, вам придется как следует поразмыслить, если только вы не подберете верный ответ случайно.

4. Цифровое деление

Это еще одна прекрасная головоломка, в которой нужно разделить девять цифр (ноль не используется) на две группы так, чтобы получились два числа, такие что первое из них при делении на второе давало бы заданное число без остатка. Например, 13458 при делении на 6729 дает 2. Сможет ли читатель составить числа так, чтобы результат деления равнялся 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9? Кроме того, сможете ли вы найти минимально возможные числа в каждом из этих случаев? Так, 14658 при делении на 7329 дает 2, как и в примере, который я привел выше, но оба числа в этом случае больше.

5. Цифровые квадраты

Девять цифр расположены так, что образуют квадраты некоторых других чисел: 9, 81, 324, 576. Сможете ли вы объединить их так, чтобы получился один квадрат, сначала наибольший, а затем наименьший из возможных?

Решения

1. Если один покупатель купил в два раза больше вина, чем другой, то общий объем проданного вина должен делиться на 3. Чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3. Сумма цифр для каждой бочки равна 6, 4, 1, 2, 7 и 9 соответственно. Сумма этих чисел равна 29. Это число при делении на 3 дает остаток 2. Сумма цифр числа, равного объему бочки с пивом, должна равняться 2, $2 + 3 = 5$ или $2 + 3 + 3 = 8$. Единственная бочка, которая удовлетворяет этому условию, — это бочка на 20 галлонов. У торговца осталась бочка на 20 галлонов, он продал первому покупателю 33 галлона (бочки на 15 и 18 галлонов), второму — 66 (бочки на 16, 19 и 31 галлон).

2. Решение, при котором сумма цифр результата является наименьшей: $23 \cdot 174 = 58 \cdot 69 = 4\,002$. Решение, при котором сумма цифр результата является наибольшей: $9 \cdot 654 = 18 \cdot 327 = 5886$. В первом случае сумма цифр равна 6, во втором — 27. Эту задачу можно решить только методом проб и ошибок.

3. Разделим 10 кружков на три группы таким образом: 715–46–32890. Произведение первого и второго чисел равно третьему числу.

4. Будет удобнее рассматривать не произведения, а дроби: половину, третью, четвертую, пятую, шестую, седьмую, восьмую и девятую части. Сначала я приведу восемь ответов:

6729 / 13458 = 1/2,
5823 / 17469 = 1/3,
5942 / 15768 = 1/4,
2697 / 13485 = 1/5,
9943 / 17658 = 1/6,
2304 / 16758 = 1/7,
3187 / 25496 = 1/8,
6581 / 57429 = 1/9.

Сумма цифр в числителе и знаменателе всегда равна 45, цифровой корень равен 9. Если мы разделим девять цифр на две группы произвольным образом, сумма цифровых корней всегда будет равна 9. Более того, два цифровых корня будут соответственно равны 9–9, 8–1, 7–2, 6–3 или 5–4. В первом случае сумма цифр равна 18, но цифровой корень этого числа равен 9. В тех случаях, когда одно число равно третьей, четвертой, шестой, седьмой и девятой части другого, цифровые корни будут равны 9–9. Иными словами, цифровой корень и числителя, и знаменателя должен равняться 9. Когда одно число равно половине или пятой части другого, цифровые корни будут равны 6–3. Разумеется, бóльший корень может соответствовать как числителю, так и знаменателю. Например, 2697/13 485, 2769/14 865, 2973/14 865 и 3729/18 645. В первых двух случаях цифровые корни числителя и знаменателя соответственно равны 6 и 3, в третьем и четвертом случае — 3 и 6. Наиболее интересный из всех случаев тот, при котором одно число равно восьмой части другого. Здесь цифровые корни могут принимать любое из пяти значений, упомянутых выше.

Если мы будем рассматривать знаменатели дробей как числа, умноженные на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 соответственно, то нужно будет обратить внимание на перенос в следующий разряд. Чтобы получить пятизначный результат умножения, нам потребуется выполнить по меньшей мере один перенос после умножения последней цифры слева. Если множитель больше 4, то мы будем переносить значение в следующий разряд как минимум три раза. Как следствие, начиная с того случая, когда одно число в пять раз больше другого, и заканчивая случаем, когда одно число в девять раз больше другого, мы не сможем получить различные решения простой попарной перестановкой цифр, как, например, в случае с 5832/17 496 и 5823/17 469, где 2/6 и 3/9 меняются местами. Разумеется, одни и те же цифры часто можно располагать по-разному, как, например, пары значений, приведенные в предыдущем абзаце. Однако в этом случае нужно полностью менять порядок цифр, и ограничиться простой попарной перестановкой не получится. Есть и другие детали, которые сможет заметить любой читатель. Например, цифра 5 никогда не может занимать крайний правый разряд числителя, так как в этом случае знаменатель должен будет заканчиваться на 0 или снова на 5. Аналогично, в последнем разряде не может находиться 1 или 6 в случае, когда результат деления равен шести. Также в последнем разряде числителя не может быть четная цифра, когда результат деления равен пяти, и так далее. Несмотря на приведенные мной указания, вам придется потратить много времени на перебор вариантов, однако в итоге вы придете к правильному ответу.

5. Насколько мне известно, таблицы квадратных чисел, которые могли бы пригодиться при решении этой головоломки, не публиковались. Наименьший квадрат, в записи которого содержатся все цифры по одному разу, равен 139 854 276. Это квадрат числа 11 826. Наибольший квадрат, удовлетворяющий этим же условиям, равен 923 187 456. Это квадрат числа 30 384.

В головоломке «Разборный куб», которую можно считать обобщенным вариантом головоломки о спрямлении полимино в трех измерениях, нужно собрать куб со стороной 6 кубиков из 54 одинаковых тетрамино в форме буквы Т.

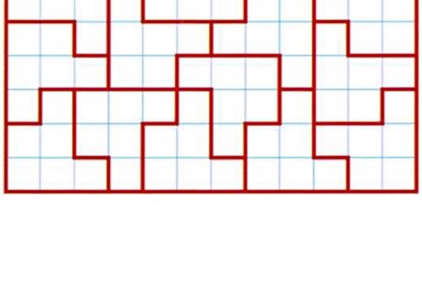
Спрямляемые полимино
Разборный куб

◄ *Из всех возможных решений головоломки «Разборный куб» здесь шаг за шагом рассматривается самое элегантное, которое можно получить единственным способом.*

Соломон Голомб придумал полимино — обобщенный вариант костяшек домино. В отличие от них, полимино состоят не из двух квадратов, а из трех и более. Самыми знаменитыми из них являются пентамино, состоящие из пяти смежных квадратов, соединенных 12 разными способами. Пентамино настолько знамениты, что в 1975 году Голомб запатентовал это слово.

После выхода его книги «Полимино» было создано и изучено множество игр и задач, связанных с этими фигурами. Дэвид Кларнер, будучи еще студентом, придумал такую задачу: можно ли построить прямоугольник из множества копий одного полимино? Если да, то каковы минимальные размеры такого прямоугольника? Полимино, для которых эта задача имеет решение, называются спрямляемыми.

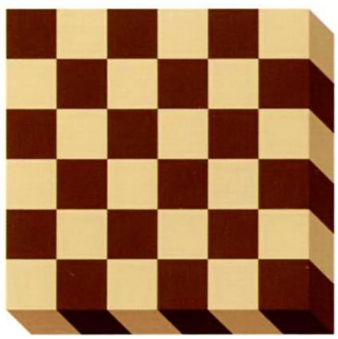
▼ *Тетрамино в форме буквы Т является спрямляемым, так как из четырех таких тетрамино можно построить квадрат со стороной 4 (слева). Справа — пример спрямленного гексамино.*

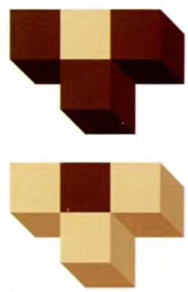


Построение прямоугольников

Первым шагом к решению станет попытка составить из девяти фигур квадрат со стороной 6, который станет основанием куба. Шесть таких квадратов, поставленных друг на друга, образуют куб со стороной 6. Однако это невозможно.

Рассмотрим в качестве доказательства шахматную доску размером 6 × 6 клеток вместо обычных восьми. Каждая фигура займет четыре клетки доски, три из которых будут одного цвета. Так как число черных и белых клеток на доске одинаково (18), нам потребуется четное число фигур (половина из них займут три белые клетки и одну черную, остальные — одну белую и три черных). Но чтобы покрыть всю доску, нам потребуется нечетное число фигур (9 фигур из 4 клеток займут в общей сложности 36 клеток). Получили противоречение.





Подобные рассуждения можно использовать для любого прямоугольника, в котором число белых и черных клеток одинаково, то есть для прямоугольника с четным числом клеток. Так как каждое тетрамино занимает четыре клетки, любой прямоугольник, который мы хотим построить, должен иметь число клеток, кратное 4, то есть четное число клеток. Нам дано четное число фигур, каждая из которых занимает четыре клетки, следовательно, площадь полученного прямоугольника должна быть кратна 8.

Кроме того, нетрудно показать, что нельзя построить прямоугольник, одна из сторон которого равна 1, 2 или 3, что показано на рисунке на следующей странице. На этом рисунке клетки, которые нельзя будет покрыть, отмечены крестиком. На третьей схеме, приведенной на этом рисунке, положение двух первых фигур является единственно возможным.

X	X	X	X	X		1xn

X	1					2xn
1	1	1				

1	2	2	2			
1	1	2				3xn
1	X					

Таким образом, остается всего два возможных варианта — 4 × 4 и 4 × 6. Однако второй из этих вариантов также невозможно построить, что показано на рисунке:

a

1	1	1			
2	1				
2	2				
2					
X					
X					

b

1	2	2	2		
1	1	2			
1	X				
2′	X				
2′	2′				
2′					

Фигуру, которая занимает верхнюю правую клетку, можно расположить всего двумя способами. Они приведены на рисунках (a) и (b). На рисунке (a) первая фигура однозначно определяет положение второй. При таком расположении фигур покрыть одновременно обе клетки, отмеченных крестиком, нельзя. На рисунке (b) первая фигура однозначно определяет положение двух фигур, обозначенных 2 и 2'. Если мы расположим фигуру 2' иначе, то не сможем покрыть три нижних клетки в левом столбце. Следовательно, мы можем покрыть только одну из двух клеток, отмеченных крестиком.

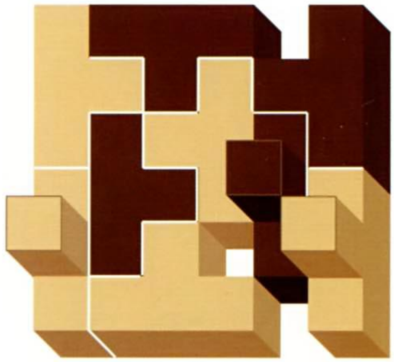
Из всего вышеизложенного можно сделать вывод: единственным прямоугольником, длина стороны которого меньше 6, который можно построить, является квадрат размерами 4 × 4.

Спрямления в пространстве

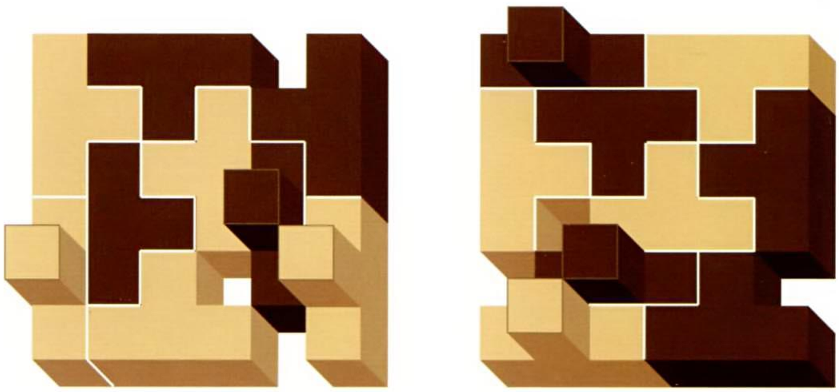
К сожалению, составить куб 6 × 6 × 6 из квадратов 4 × 4 (то есть из фигур размерами 4 × 4 × 1) нельзя, потому что объем куба (216) не кратен объему этой фигуры (16). Не следует думать, что мы зашли в тупик. Следующая попытка приведет нас к решению.

Решение

Попробуем построить прямоугольный параллелепипед размером 6 × 6 × 2. Поставив три таких фигуры друг на друга, мы получим искомый куб. Мы будем строить фигуры размером 6 × 6 × 1 с выемками и выступами.



Красота нашего решения заключается в том, что две такие «неправильные» фигуры размерами 6 × 6 × 1 равны, а их выступы и выемки совместятся, если мы повернем одну из них на 90°.



Совместив две таких фигуры, мы получим желаемый параллелепипед размером 6 × 6 × 2.

Далее нам остается лишь поставить друг на друга три эти фигуры размерами 6 × 6 × 2, чтобы получить искомый куб размером 6 × 6 × 6.


18
17
3
11
8
7
19
9
6
5
4
16
14
1
2
12
15
10
13

В следующем выпуске через 2 недели

Магический шестиугольник

Производные

Описание движения

Универсальный гений

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Мыслящие машины

Мечта Лейбница

Эдуард Люка

Лабиринты

Спрашивайте в киосках!

16+